

На правах рукописи

ПЕРЕВАЛОВА ТАТЬЯНА ВЛАДИМИРОВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ
АТТРАКТОРОВ И БИФУРКАЦИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

**05.13.18 - Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ**

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук**

Екатеринбург - 2011

Работа выполнена на кафедре математической физики ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького»

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор Л. Б. Ряшко.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Ананьев Борис Иванович
кандидат физико-математических наук,
доцент Логинов Михаил Иванович

Ведущая организация: ГОУ ВПО «Челябинский государственный университет»

Защита состоится "16" марта 2011 года в 15:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 при ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького» по адресу: 620000, Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО «Уральский государственный университет им. А.М. Горького».

Автореферат разослан "11" февраля 2011 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,
профессор

В. Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы.

Настоящая диссертация посвящена моделированию и анализу аттракторов нелинейных динамических систем, находящихся под воздействием случайных возмущений. Случайные возмущения, сопровождающие функционирование любых реальных физических, химических, биологических систем, могут оказать существенное влияние на их динамику. Один из первых результатов, касающихся выхода траектории системы под воздействием шума из области устойчивости, получил Arrhenius S.A. еще в 1899 году. Значительную известность имеет классическая работа Понтрягина Л.С., Андронова А.А., Витта А.А. "О статистическом рассмотрении динамических систем". Опубликованная в 1933 году, она содержит формулировки основных задач, изучения стохастической динамики, остающихся актуальными и на сегодняшний день.

Метод стохастических функций Ляпунова, начиная с основополагающих работ Каца И.Я. и Красовского Н.Н. 1960 г., является теоретическим фундаментом анализа устойчивости стохастических систем. Этот метод позволил не только распространить на стохастические уравнения базовые конструкции классической теории детерминированной устойчивости, но и получить новые интересные результаты, отражающие особенности, присущие только вероятностным системам. Данная методика получила в дальнейшем широкое развитие в работах Хасьминского Р.З., Гихмана И.И., Кушнера Х., Мильштейна Г.Н., Колмановского В.Б., Воронова А.А., Пакшина П.В., Ряшко Л.Б.

В последнее время при исследовании неравновесных явлений в различных областях науки была обнаружена организующая роль шума. Было показано, что флуктуации способны индуцировать гораздо более богатое разнообразие режимов в сравнении с детерминированными системами. К данной группе эффектов воздействия шумов относятся так называемые индуцированные шумом переходы (noise-induced transitions). Первое описание данных явлений было дано в конце 50х - начале 60х годов 20 века в работах Кузнецова П.И., Стратоновича Р.Л., Тихонова В.И., Ланды П.С. Спустя несколько лет эти эффекты были переоткрыты в контексте экологических систем у May R.M., Hahn H.S. и др. Классической работой по индуцированным шумом переходам стала книга Horsthemke W., Lefever R.

В конце 70х годов 20 века большое развитие получила теория стохастических бифуркаций, изучающая качественное изменение поведения динамических систем под воздействием случайных возмущений. В работах Arnold L. выделяются два основных подхода к определению понятия стохастическая бифуркация: феноменологический подход (Р-бифуркация), описывающий качественное изменение стационарной плотности распределения, и динамиче-

ский (D-бифуркация), описывающий изменение знака старшего показателя Ляпунова. Дальнейшее изучение стохастических бифуркаций в рамках, индуцированных шумом переходов для одномерного случая, проведен в работах Crauel H., Flandoli F., Leng G., Namachchivaya N. Воздействие шума на бифуркацию Хопфа двумерных систем подробно рассмотрено в работах Moss F., McClintock P.V.E., Lefever R., Turner J., Kuske R., Xu W., Zhu W.Q., He Q., Leung H., Malick K., Анищенко В.С., Вадивасовой В.Е..

Наиболее общее вероятностное описание воздействия шума на динамическую систему дает уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК). Если характер переходного процесса является несущественным, то обычно ограничиваются рассмотрением стационарного уравнения ФПК. Однако прямое использование этого уравнения даже в простейшем случае нелинейного стохастического осциллятора с одной степенью свободы является затруднительным. Аналитически стационарная плотность распределения может быть получена только для одномерных систем. Для двумерных динамических систем этого сделать, как правило, не удастся.

Для систем с малыми случайными возмущениями в работе Вентцеля А.Д. и Фрейдлина М.И. предложен подход, использующий некоторую специально конструируемую функцию Ляпунова – квазипотенциал, с помощью которой можно находить асимптотику ряда важных вероятностных характеристик выхода случайных траекторий из области устойчивого аттрактора детерминированной системы. При помощи функции квазипотенциала удастся предсказывать тонкие эффекты воздействия внешних помех на рассматриваемую систему. Применительно к точке покоя данный подход развивался в работах Bucklew J.A., Dembo M. Метод квазипотенциала в анализе стохастической чувствительности предельных циклов рассматривался в работах Day M.V., Ludvig D., Maier R.S., Dykman M.I., Graham L., Tel T., Naeh T., Smelyanskyi V.N., Мильштейна Г.Н., Ряшко Л.Б.

В исследованиях Ряшко Л.Б. и Башкирцевой И.А. разработана методика анализа стохастической чувствительности аттракторов. Данная методика базируется на аппроксимации квазипотенциала и построении функции стохастической чувствительности (ФСЧ), описывающей ковариацию отклонения случайной траектории от детерминированного аттрактора. ФСЧ является естественной вероятностной мерой, характеризующей реакцию стохастического аттрактора на малые внешние возмущения. Стихин П.В. в своих работах использовал аппарат ФСЧ для анализа обратных стохастических бифуркаций в трехмерных системах при малых аддитивных шумах. Численным процедурам отыскания стохастической чувствительности для многомерных систем посвящены работы Губкина А.А. Развитие аппарата ФСЧ для дис-

кретных систем и применение его в анализе обратных стохастических бифуркаций для одно- и двумерных систем с дискретным временем приведено в работах Цветкова И.Н.

Целью работы является разработка аппарата математического моделирования, включая теорию, численные алгоритмы и программную реализацию, для анализа стохастических аттракторов и бифуркаций нелинейных стохастических систем.

Методы исследования диссертационной работы можно условно разделить на две группы. Первая группа методов опирается на численное моделирование случайных траекторий динамических систем. Вторая группа методов опирается на использование явно найденной функции плотности распределения или аппарата функции стохастической чувствительности. Приведенные в представленной работе численные алгоритмы реализованы в разработанном программном комплексе.

Научная новизна диссертации заключается в следующем:

1. Получена оценка сдвига стохастических аттракторов общих одномерных систем под воздействием мультипликативного шума. Проведен параметрический анализ сдвигов аттракторов для ряда одномерных и двумерных систем.
2. Для одномерной кубической системы и систем Хопфа (мягкий и жесткий случаи) детально исследованы стохастические бифуркации, связанные с качественными изменениями формы графика стационарной плотности распределения при изменении мультипликативного шума.
3. Получены необходимые и достаточные условия существования функции стохастической чувствительности в случае цикла на плоскости (Теорема 1). С помощью этой функции проведено параметрическое исследование стохастических аттракторов моделей Хопфа, Ван-дер-Поля и брюсселятора.
4. Разработан и отлажен программный комплекс "Моделирование и анализ аттракторов нелинейных стохастических систем", позволяющий проводить численные эксперименты по моделированию стохастической динамики одно- и двумерных динамических систем, проводить детальный анализ стохастических аттракторов и бифуркаций.

Теоретическая и практическая значимость исследований

Теоретическая значимость представляемой диссертационной работы заключается в проведенном анализе стохастических аттракторов и бифуркаций ряда одномерных и двумерных динамических моделей. Для случая цикла

на плоскости доказаны необходимые и достаточные условия существования функции стохастической чувствительности (ФСЧ), получена оценка погрешности ФСЧ-аппроксимацией для стационарных плотностей.

Практическая ценность работы заключается в проведенном параметрическом анализе явлений сдвига и бифуркаций стохастических аттракторов под действием мультипликативного шума для одномерных и двумерных систем Хопфа, в применение аппарата ФСЧ в исследовании аттракторов моделей Хопфа, Ван-дер-Поля и брюсселятора. Практическую значимость также имеет программный комплекс разработанный и отлаженный для проведения численных экспериментов.

Личный вклад. Все представленные в диссертационной работе результаты получены при личном участии автора. Ею был разработан программный комплекс, использующийся в ходе численных экспериментов, проведены все теоретические исследования и обработаны их результаты. Автор участвовал в постановке промежуточных задач и в обсуждении конечных результатов исследования. В коллективных публикациях она лично принимала участие в написании текстов.

Апробация работы. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на представительных научных форумах: Международная научная конференция по устойчивости, управлению и моделированию динамических систем, посвященная 75-летию со дня рождения Каца И.Я. (Екатеринбург, 2006); Международная научно-техническая конференция "Компьютерное моделирование" (Санкт-Петербург, 2006, 2007, 2008); 38-я, 39-я, 40-я, 41-я Региональные молодежные конференции по проблемам теоретической и прикладной математики (Екатеринбург, 2007, 2008, 2009, 2010); Всероссийская научно-практическая конференция "Информационные и коммуникационные технологии в образовании" (Борисоглебск, 2007); Межвузовская научная конференция по проблемам информатики "СПИСОК-2009" (Екатеринбург, 2009); Конференция, посвященная 50-летию кафедры вычислительной математики и математико-механического факультета УрГУ (Екатеринбург, 2010).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, из них 2 статьи в реферируемых научных журналах, 11 тезисов докладов. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав основного содержания, приложения, заключения и списка цитируемой литературы. Общий объем диссертации составляет 171 страницу машинописного текста, она содержит 61 рисунок, 3 таблицы и 133 ссылки на литературные источники.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** кратко обоснована актуальность работы, сформулированы ее цели, указаны научная новизна, практическое значение и апробация проведенных исследований.

В **первой главе "Стохастические аттракторы и бифуркации"** рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx = f(x)dt, \quad x, f \in R^n \quad (1)$$

и соответствующие ей стохастические системы в форме Ито

$$dx = f(x)dt + \varepsilon \sigma(x) dw(t), \quad (2)$$

или Стратоновича

$$dx = f(x)dt + \varepsilon \sigma(x) \circ dw(t). \quad (3)$$

Здесь $w(t)$ – m -мерный стандартный винеровский процесс, $\sigma(x)$ – достаточно гладкая $n \times m$ матричная функция, задающая зависимость случайных возмущений от состояния системы, ε – параметр интенсивности возмущений. Обозначение $\circ dw(t)$ указывает на то, что уравнение (3) является стохастическим дифференциальным уравнением Стратоновича.

Предполагается, что детерминированная система (1) имеет экспоненциально устойчивый аттрактор \mathcal{M} . В результате действия невырожденных шумов ($\sigma(x)|_{\mathcal{M}} \neq 0$) случайные траектории системы покидают детерминированный аттрактор \mathcal{M} и формируют вокруг него некоторый пучок.

Детальное вероятностное описание случайных траекторий системы (2) в этом пучке в терминах плотности распределения $\rho(t, x, \varepsilon)$ дается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} \rho) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \rho), \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}. \quad (4)$$

Если характер переходного процесса является несущественным, а основной интерес представляет возможный установившийся режим, то можно ограничиться рассмотрением стационарной плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$, задаваемой стационарным уравнением ФПК

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij} \rho) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i \rho) = 0, \quad a_{ij} = [\sigma \sigma^T]_{ij}. \quad (5)$$

В разделе 1.1 рассматривается стохастическое одномерное нелинейное дифференциальное уравнение

$$dx = f(x)dt + \varepsilon\sigma(x)dw. \quad (6)$$

В детерминированном одномерном случае аттракторами системы являются устойчивые точки покоя $x(t) \equiv \bar{x}$.

Для системы (6) построено решение

$$\rho(x) = \frac{K}{\sigma^2(x)} \exp \left(\frac{2}{\varepsilon^2} \int_{x_0}^x \frac{f(s)}{\sigma^2(s)} ds \right) \quad (7)$$

стационарного уравнения ФПК (5), которое задает функцию стационарной плотности распределения. Здесь K – константа интегрирования, которая может быть найдена из условия нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)dx = 1$.

Величины \tilde{x} , отвечающие максимальным значениям плотности вероятности $\rho(x)$ играют важную роль в описании стохастического равновесия: \tilde{x} отмечают точки, в которых концентрация случайных состояний системы максимальна. В работе исследовано взаимное расположение \tilde{x} и \bar{x} в зависимости от шума: в присутствии лишь аддитивного шума точки с максимальной и минимальной концентрацией совпадают с точками покоя детерминированной системы; при мультипликативных шумах точка максимальной концентрации \tilde{x} смещается от равновесия \bar{x} детерминированной системы. Для величины сдвига $\delta(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon) - \bar{x}$ получено следующее разложение по степеням ε .

Лемма 1. Пусть \bar{x} – устойчивое равновесие ($f'(\bar{x}) < 0$). Для функции $\delta(\varepsilon)$ при малых значениях ε и достаточно гладких $f(x)$ и $\sigma(x)$, справедливо разложение

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon) = \tilde{x}(\varepsilon) - \bar{x} = & \frac{\sigma(\bar{x})\sigma'(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\varepsilon^2 + \\ & + \frac{2f'(\bar{x})((\sigma'(\bar{x}))^2 + \sigma''(\bar{x})\sigma(\bar{x}))\sigma'(\bar{x})\sigma(\bar{x}) - f''(\bar{x})(\sigma'(\bar{x}))^2\sigma^2(\bar{x})}{2(f'(\bar{x}))^3}\varepsilon^4 + O(\varepsilon^6). \end{aligned} \quad (8)$$

В разделе 1.1.1 рассматривается стохастическая линейная система в интерпретации Ито

$$dx = \mu xdt + \sigma_1(x - a)dw_1 + \sigma_2dw_2. \quad (9)$$

У детерминированной системы при $\mu \neq 0$ существует единственная точка покоя $\bar{x} = 0$, устойчивая при значении параметра $\mu < 0$ и неустойчивая при $\mu > 0$.

Для стохастического уравнения (9) построено решение стационарного уравнения ФПК (5) для случаев воздействия на систему аддитивного и мультипликативного шума. Изменение интенсивности σ_2 аддитивного шума не меняет положения экстремума функции плотности распределения $\rho(x)$, в то время как изменение интенсивности σ_1 мультипликативного шума сдвигает его. При этом в зоне параметра $\mu \in (0, \frac{\sigma_1^2}{2})$ наблюдается стабилизация неустойчивого равновесия.

Также рассматривается стохастически возмущенная система (9) в интерпретации Стратоновича

$$dx = \mu x dt + \sigma_1(x - a) \circ dw_1 + \sigma_2 \circ dw_2. \quad (10)$$

Построено решение стационарного уравнения ФПК (5) для случаев аддитивного шума и мультипликативного шума. Получено, что в интерпретации Стратоновича не существует зоны стабилизации неустойчивой точки покоя. При $\mu < 0$ в системе (10) также наблюдается сдвиг стохастического аттрактора при изменении интенсивности параметрического шума.

В разделе 1.1.2 представлены результаты исследования системы с квадратичной нелинейностью в интерпретации Стратоновича

$$dx = x(\mu - x)dt + \sigma_1 x \circ dw_1 + \sigma_2 \circ dw_2. \quad (11)$$

У детерминированной системы существуют две точки покоя $\bar{x}_1 = 0$ и $\bar{x}_2 = \mu$. При значении параметра $\mu < 0$ точка покоя $\bar{x}_1 = 0$ устойчива, а точка покоя $\bar{x}_2 = \mu$ неустойчива. При $\mu > 0$ равновесие $\bar{x}_1 = 0$ неустойчиво, а $\bar{x}_2 = \mu$ устойчиво.

Для стохастического уравнения (11) найдена стационарная плотность распределения. Показано, что в системе с аддитивным шумом не существует регулярного стохастического аттрактора, траектории стохастической системы уходят в бесконечность. В случае воздействия на систему только невырожденного мультипликативного шума ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = 0$) найдена стационарная плотность распределения $\rho(x) = K x^{\frac{2\mu}{\sigma_1^2} - 1} e^{-\frac{2}{\sigma_1^2} x}$. В зависимости от значений параметров распределение $\rho(x)$ имеет три качественно различные формы (рис. 1). При $\frac{2\mu}{\sigma_1^2} < 1$ функция $\rho(x)$ имеет $\lim_{x \rightarrow 0} \rho(x) = \infty$ и монотонно убывает на $(0, +\infty)$. При $\frac{2\mu}{\sigma_1^2} = 1$ функция $\rho(x)$ монотонно убывает на интервале $(0, +\infty)$ и имеет в нуле конечное значение. Если $\frac{2\mu}{\sigma_1^2} > 1$, то $\rho(0) = 0$, функция $\rho(x)$ перестает быть монотонной, и имеет на $(0, +\infty)$ максимум в точке $\bar{x}_s = \mu - \frac{\sigma_1^2}{2}$.

В случае достаточно больших шумов, когда $\sigma_1 > \sqrt{2\mu}$, плотность распределения неограниченно возрастает в нуле. Случайные траектории системы

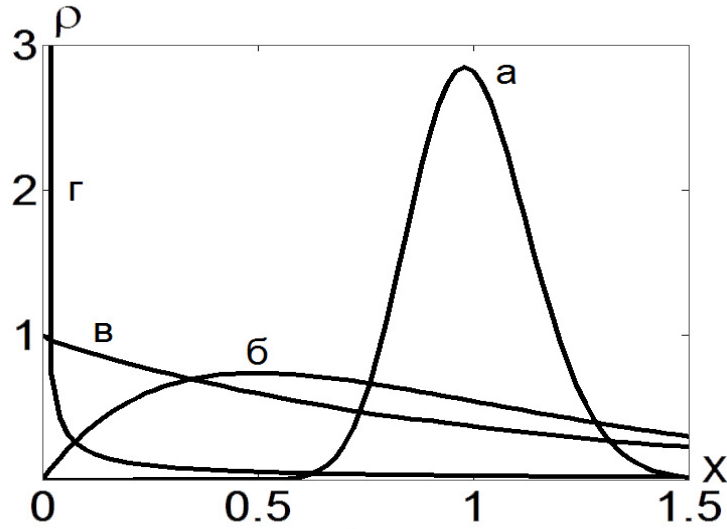


Рис. 1: Функция плотности распределения системы (11) при $\mu = 1$ для а) $\sigma_1 = 0.2$, б) $\sigma_1 = 1$, в) $\sigma_1 = \sqrt{2}$, г) $\sigma_1 = 3$.

концентрируются вблизи равновесия $\bar{x}_1 = 0$, что интерпретируется как стабилизация неустойчивого равновесия системы, вызванное увеличением мультипликативного шума. В диапазоне $0 < \sigma_1 < \sqrt{2\mu}$ у системы (11) наблюдается сдвиг стохастического аттрактора при изменении интенсивности параметрического шума σ_1 .

Раздел 1.1.3 посвящен исследованию системы с кубической нелинейностью в интерпретации Стратоновича

$$dx = x(\mu - x^2)dt + \sigma_1 x \circ dw_1 + \sigma_2 \circ dw_2. \quad (12)$$

У детерминированной системы существуют три точки покоя: $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \sqrt{\mu}$, и $\bar{x}_3 = -\sqrt{\mu}$. При $\mu < 0$ единственная точка покоя $\bar{x}_1 = 0$ устойчива. При $\mu > 0$ положение $\bar{x}_1 = 0$ теряет устойчивость, и появляется пара устойчивых равновесий $\bar{x}_2 = \sqrt{\mu}$, $\bar{x}_3 = -\sqrt{\mu}$.

В случае, когда на систему действует только аддитивный шум ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$) случайные траектории концентрируются вокруг устойчивых равновесий \bar{x}_2 , \bar{x}_3 (рис. 2). Под воздействием случайных возмущений наблюдается перераспределение решений стохастической системы из окрестности одного равновесия в окрестность другого. Такие индуцированные шумом случайные колебания интерпретируются как стохастический цикл. Увеличение аддитивного шума уменьшает время нахождения случайных траекторий в окрестности одного равновесия и увеличивает частоту перехода.

В случае воздействия невырожденного мультипликативного шума наблюдается качественное изменение формы графика стационарной плотности. При увеличении его интенсивности форма $\rho(x)$ меняется от бимодальной к унимо-

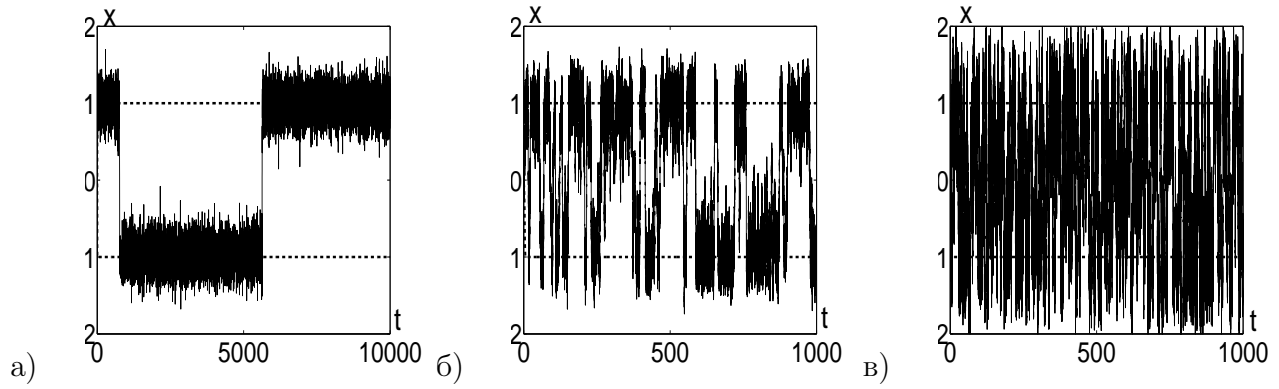


Рис. 2: Случайные траектории системы при $\mu = 1$, а) $\sigma_2 = 0.2$, б) $\sigma_2 = 0.5$, в) $\sigma_2 = 1$.

дальной. Это интерпретируется как *обратная стохастическая бифуркация*. В точке $\sigma_1 = \sqrt{2\mu}$ происходит качественное изменение динамики. В зоне $0 < \sigma_1 < \sqrt{2\mu}$ система имеет стохастический цикл, а в зоне $\sigma_1 > \sqrt{2\mu}$ – стохастическое равновесие.

Для систем (10) – (12) проведен анализ оценки (8) сдвига δ в зависимости от параметра $\varepsilon = \sigma_1$. Для квадратичной системы (11) справедлива точная формула $\delta = \frac{\sigma_1^2}{2}$. Для линейной (10) и кубической (12) систем на рис. 3 представлены: график (а) точной функции $\delta(\sigma_1)$, и ее первого (б) и второго (в) приближений, найденных из разложения (8).

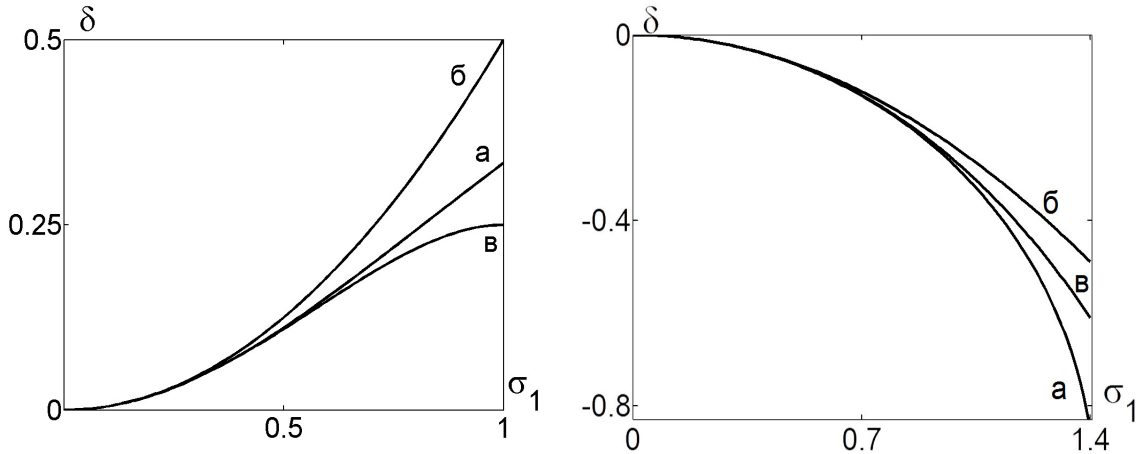


Рис. 3: Оценка сдвига стохастического аттрактора $\delta(\sigma_1)$ для линейной (10) (слева) и кубической (12) (справа) систем: (а) точная функция $\delta(\sigma_1)$, (б) первое приближение, (в) второе приближение.

В **разделе 1.2** рассматриваются двумерные системы нелинейных стохастических дифференциальных уравнений Хопфа (мягкий и жесткий режимы) в форме Стратоновича.

В **разделе 1.2.1** приведен детальный анализ поведения аттракторов си-

стемы Хопфа (мягкий режим)

$$\begin{cases} dx = (\mu x - y + (x^2 + y^2)x)dt + \sigma_1 x \circ dw_1 + \sigma_2 \circ dw_2, \\ dy = (x + \mu y - (x^2 + y^2)y)dt + \sigma_1 y \circ dw_1 + \sigma_3 \circ dw_3. \end{cases} \quad (13)$$

При значении параметра $\mu < 0$ единственным аттрактором детерминированной системы является устойчивая точка покоя $(0, 0)$. При $\mu > 0$ система имеет неустойчивое равновесие $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл $\mu = x^2 + y^2$.

В случае, когда на систему действует только аддитивный шум ($\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 \neq 0$), изменение его интенсивности не меняет положение локальных экстремумов функции плотности распределения. Увеличение аддитивного шума приводит к увеличению разброса случайных траекторий системы Хопфа вокруг детерминированных аттракторов (т.е. вокруг устойчивой точки покоя $(0, 0)$ при $\mu \leq 0$ и вокруг устойчивого предельного цикла $x^2 + y^2 = \mu$ при $\mu > 0$). Таким образом, в отсутствие параметрических шумов точка бифуркации детерминированной системы является одновременно точкой бифуркации системы с аддитивными помехами. Как видим, аддитивный шум не меняет расположения точек бифуркации.

Присутствие невырожденного мультипликативного шума ($\sigma_1 \neq 0$) изменяет точку бифуркации от $\mu = 0$ (для детерминированной системы) к $\mu = \sigma_1^2$ (для стохастической). Таким образом, увеличение интенсивности σ_1 приводит к перераспределению концентрации возмущенных траекторий от предельного цикла к точке покоя. В работе подробно описан эффект обратной стохастической бифуркации и построена бифуркационная диаграмма стохастической системы.

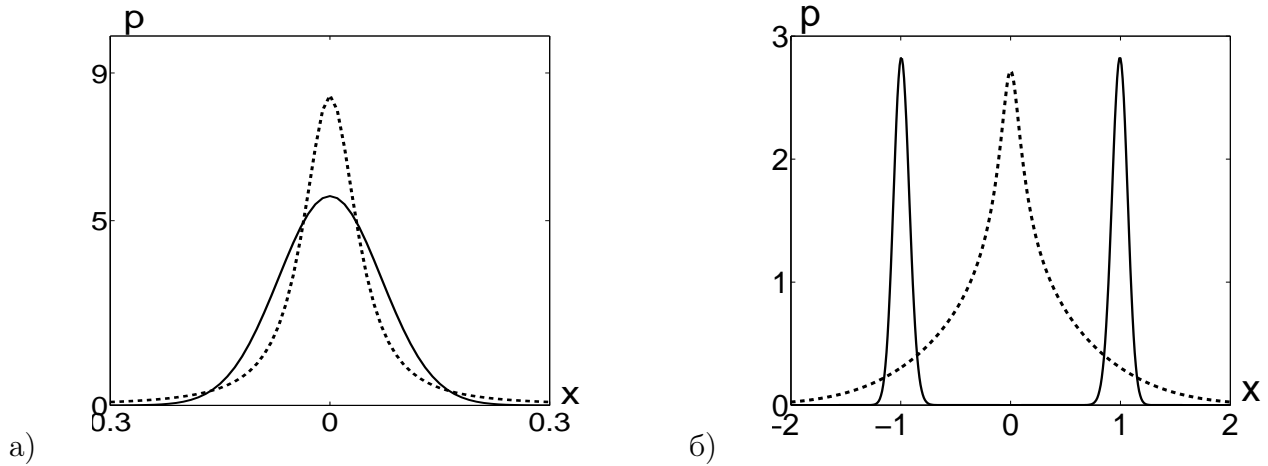


Рис. 4: Графики функции p при $\sigma_2 = 0.1$, $\sigma_1 = 0.1$ (сплошная), $\sigma_1 = 2$ (пунктир) для а) $\mu = -1$, б) $\mu = 1$.

На рис. 4 можно проследить качественное изменение формы графика ста-

ционарной плотности p при изменении параметра мультипликативного шума σ_1 . В зоне $\mu < 0$ увеличение интенсивности мультипликативного шума σ_1 ведет к уменьшению разброса случайных траекторий вокруг равновесия $(0, 0)$ (рис. 4 а). В зоне $\mu > 0$ увеличение σ_1 ведет к уменьшению плотности вероятности случайных траекторий вокруг стохастического предельного цикла $x^2 + y^2 = \mu$ и к повышению их концентрации в окрестности равновесия $(0, 0)$ (рис. 4 б).

Раздел 1.2.2 посвящен анализу поведения аттракторов системы Хопфа (жесткий режим)

$$\begin{cases} dx = (x(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) - y)dt + \sigma_1 x \circ dw_1 + \sigma_2 \circ dw_2, \\ dy = (y(\mu + 2x^2 + 2y^2 - (x^2 + y^2)^2) + x)dt + \sigma_1 y \circ dw_1 + \sigma_3 \circ dw_3, \end{cases} \quad (14)$$

При $\mu < -1$ единственным аттрактором детерминированной системы является устойчивая точка покоя $(0, 0)$. При $-1 < \mu < 0$ – два устойчивых аттрактора (равновесие $(0, 0)$ и цикл $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{1 + \mu}$) и один неустойчивый (цикл $x^2 + y^2 = 1 - \sqrt{1 + \mu}$). При $\mu > 0$ система имеет неустойчивое равновесие $(0, 0)$ и устойчивый предельный цикл $x^2 + y^2 = 1 + \sqrt{1 + \mu}$.

В случае, когда на систему Хопфа действует только аддитивный шум ($\sigma_1 = 0, \sigma_2 \neq 0$), изменение его интенсивности не меняет положение локальных экстремумов функции плотности распределения. Точки бифуркации детерминированной системы являются одновременно точками бифуркации системы с аддитивными помехами. Таким образом, аддитивный шум не меняет расположения точек бифуркации.

В случае, когда на систему действует невырожденный мультипликативный шум ($\sigma_1 \neq 0$), показано, что для каждого фиксированного значения параметра $\mu > 0$ увеличение σ_1 приводит к переходу от стохастического предельного цикла ($0 < \sigma_1 < \sqrt{\mu}$) к одновременному существованию стохастического предельного цикла и стохастической точки покоя ($\sqrt{\mu} < \sigma_1 < \sqrt{\mu + 1}$), а затем к стохастическому равновесию ($\sigma_1 > \sqrt{\mu + 1}$). Таким образом, в точках $\sigma_1 = \sqrt{\mu}$ и $\sigma_1 = \sqrt{\mu + 1}$ наблюдаются *обратные стохастические бифуркации*.

На рис. 5 качественные изменения формы графика стационарной плотности наглядно иллюстрируют обратные стохастические бифуркации:

$$\text{”цикл”} \rightarrow \text{”цикл+равновесие”} \rightarrow \text{”равновесие”}.$$

При фиксированном значении $\mu = 0.1$ стохастические бифуркации происходят в точках $\sigma_1 = \sqrt{0.1} \approx 0.316$ и $\sigma_1 = \sqrt{1.1} \approx 1.049$. При увеличении интенсивности мультипликативного шума от $\sigma_1 = 0.3$ (рис. 5 а) к $\sigma_1 = 0.8$ (рис. 5 б), форма графика функции $p(x, y)$ преобразуется из ”кратер” в ”кратер+пик”. Увеличение от $\sigma_1 = 0.8$ (рис. 5 б) к $\sigma_1 = 1.5$ (рис. 5 в) преобразует

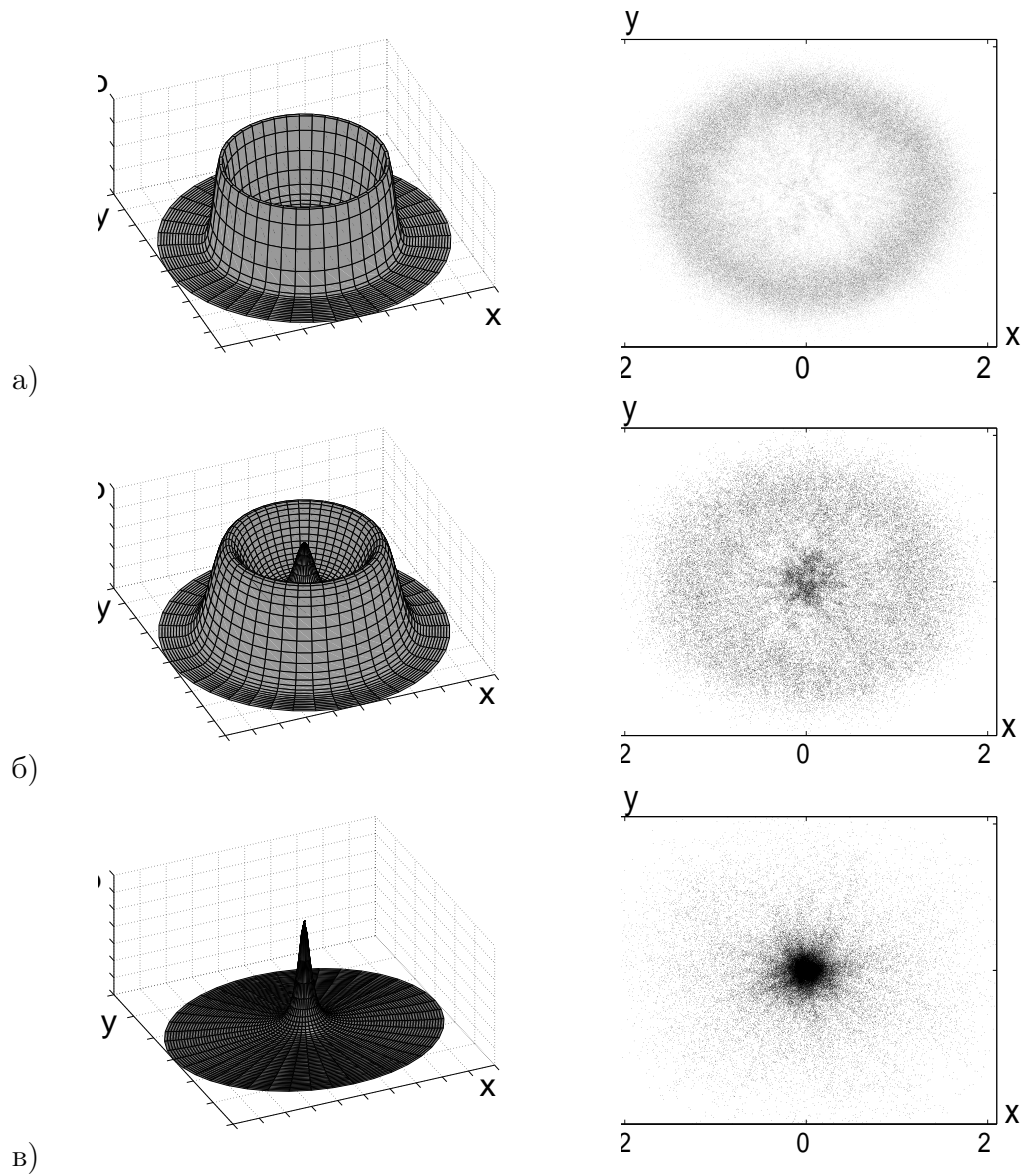


Рис. 5: Графики функции $p(x, y)$ и случайные состояния системы 14 при $\mu = 0.1$, $\sigma_2 = 0.2$ для а) $\sigma_1 = 0.3$, б) $\sigma_1 = 0.8$, в) $\sigma_1 = 1.5$.

форму графика из "кратер+пик" в "пик". Дальнейшее увеличение σ_1 приводит лишь к увеличению высоты пика.

Во второй главе "**Анализ аттракторов методом функции стохастической чувствительности**" описаны основные методы анализа детерминированной устойчивости аттракторов нелинейных двумерных систем, а также введена конструкция функции стохастической чувствительности, позволяющая исследовать чувствительность аттрактора к случайным помехам. Проведен анализ стохастической чувствительности аттракторов к случайным возмущениям на примере систем: Хопфа (мягкий и жесткий режимы), Ван-дер-Поля, брюсселятора.

В разделе 2.1 изложены основы классического анализа локальной устойчивости аттракторов системы по первому приближению. Описана методика исследования устойчивости с использованием техники мультипликаторов и характеристических показателей Ляпунова.

Раздел 2.2 посвящен анализу стохастической чувствительности аттракторов детерминированной системы, возмущенной шумом малой интенсивности. Излагается теоретический подход, опирающийся на использование функции стохастической чувствительности. Основным объектом, рассматриваемым в данной главе, является система стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dx = f(x)dt + \varepsilon \sigma(x) dw(t). \quad (15)$$

С помощью некоторой функции Ляпунова – квазипотенциала – в случае малых шумов можно получить асимптотику стационарной плотности распределения случайных траекторий в форме нормального закона

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \exp \left(-\frac{(\Delta(x), \Phi^+(\gamma(x))\Delta(x))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 \Phi(\gamma)$, где $\gamma(x)$ – ближайшая к x точка детерминированного аттрактора, $\Delta(x) = x - \gamma(x)$. Матричная функция $\Phi(x)$ – функция стохастической чувствительности (ФСЧ) – позволяет описать основные вероятностные характеристики стохастически возмущенного аттрактора. Конструктивное построение этой функции и исследование с ее помощью свойств стохастических аттракторов двумерных систем составляет основное содержание этой главы.

Раздел 2.2.1 посвящен анализу стохастической чувствительности точки покоя. Рассматривается случай, когда аттрактором \mathcal{M} системы (1) является единственная экспоненциально устойчивая точка покоя \bar{x} ($\mathcal{M} = \{\bar{x}\}$). В этом случае для квазипотенциала используется квадратичная аппроксимация

$$v(x) \approx \frac{1}{2}(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x})).$$

Эта аппроксимация позволяет представить асимптотику стационарной плотности $\rho(x, \varepsilon)$ в форме нормального распределения

$$\rho(x, \varepsilon) \approx K \exp \left(-\frac{(x - \bar{x}, W^{-1}(x - \bar{x}))}{2\varepsilon^2} \right)$$

с ковариационной матрицей $\varepsilon^2 W$, характеризующей разброс случайных траекторий системы (15) вокруг равновесия \bar{x} .

Матрица W является решением алгебраического уравнения

$$FW + WF^\top = -S, \quad F = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}), \quad S = GG^\top, \quad G = \sigma(\bar{x}).$$

В разделе 2.2.2 рассматривается случай, когда аттрактором \mathcal{M} системы (1) является предельный цикл, задаваемый некоторым T -периодическим решением $x = \xi(t)$, где $x_0 = \xi(0)$ – фиксированная точка цикла. Решение $\xi(t)$ на интервале $[0, T)$ задает естественную параметризацию точек цикла: $\mathcal{M} = \{\xi(t) | 0 \leq t < T\}$. Предполагается, что цикл является экспоненциально устойчивым.

Для малых шумов с помощью соответствующей квадратичной аппроксимации квазипотенциала вблизи точки $\xi(t)$ цикла можно записать экспоненциальную гауссовскую асимптотику

$$\rho_t(x, \varepsilon) = K \exp \left(-\frac{(x - \xi(t))^\top W^+(t)(x - \xi(t))}{2\varepsilon^2} \right)$$

со средним значением $m_t = \xi(t)$ и ковариационной матрицей $D(t, \varepsilon) = \varepsilon^2 W(t)$.

Функция стохастической чувствительности $W(t)$ цикла является решением системы

$$\dot{W} = F(t)W + WF^\top(t) + P(t)S(t)P(t), \quad (16)$$

с условиями периодичности

$$W(t + T) = W(t) \quad (17)$$

и вырожденности

$$W(t)r(t) = 0, \quad r(t) = f(\xi(t)). \quad (18)$$

Здесь $F(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi(t))$, $S(t) = G(t)G^\top(t)$, $G(t) = \sigma(\xi(t))$, $P(t) = P_{f(\xi(t))}$, $P_r = I - \frac{rr^\top}{r^\top r}$.

Лемма 2. Для проекционной матрицы $P(t) = p(t)p^\top(t)$ справедливы равенства

$$p^\top(t)P(t)p(t) \equiv 1, \quad p^\top(t)\dot{P}(t)p(t) \equiv 0.$$

Здесь $p(t)$ – нормированный вектор, ортогональный касательному вектору $f(\xi(t))$.

В случае цикла на плоскости ($n = 2$) матрица $W(t)$ представима в виде $W(t) = m(t)P(t)$, где $m(t) > 0$ – T -периодическая скалярная функция, задающая разброс пучка по нормали $p(t)$ к циклу. Для функции $m(t)$ справедлива краевая задача

$$\dot{m}(t) = a(t)m(t) + b(t), \quad m(0) = m(T) \quad (19)$$

с T -периодическими коэффициентами

$$a(t) = p^\top(t)(F^\top(t) + F(t))p(t), \quad b(t) = p^\top(t)S(t)p(t).$$

Лемма 3. Пусть

$$\forall t \in R^1 \quad b(t) \geq 0, \quad \int_0^T b(t)dt > 0. \quad (20)$$

Для того чтобы краевая задача (19) имела единственное решение $m(t) > 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы для коэффициента $a(t)$ выполнялось неравенство

$$\int_0^T a(t)dt < 0. \quad (21)$$

Решение краевой задачи (19) находится явно в виде

$$m = g(t)(C + h(t)),$$

где

$$g(t) = \exp \left(\int_0^t a(s)ds \right), \quad h(t) = \int_0^t \frac{b(s)}{g(s)}ds, \quad C = \frac{g(T)h(T)}{1 - g(T)}.$$

Лемма 4. При $n = 2$ ненулевой характеристический показатель λ детерминированной системы

$$dz = F(t)zdt \quad (22)$$

имеет вид

$$\lambda = \frac{1}{2T} \int_0^T a(t)dt. \quad (23)$$

Теорема 1. Пусть цикл, задаваемый T -периодическим решением $\xi(t)$, является \mathcal{E} -устойчивым. Для того чтобы краевая задача (19) имела единственное решение $m(t) > 0$ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой точке $t \in [0, T]$ выполнялось неравенство $\sigma^\top(\xi(t))p(t) \neq 0$.

Функция $m(t)$ дает детальное описание стохастической чувствительности вдоль цикла. В анализе влияния случайных возмущений на стохастическую динамику системы около предельного цикла важную роль играет коэффициент чувствительности цикла к случайным возмущениям

$$M = \max_{[0, T]} m(t),$$

который является удобной характеристикой цикла в целом.

В разделе 2.3 аппарат функции стохастической чувствительности применяется к анализу классических двумерных моделей нелинейной динамики.

В разделе 2.3.1 проведен анализ чувствительности аттракторов с помощью аппарата ФСЧ для системы Хопфа (мягкий режим).

В разделе 2.3.2 для системы Хопфа (жесткий режим) найдена функция стохастической чувствительности аттракторов и проведен анализ влияния аддитивного и мультипликативного шума на их чувствительность.

Получено, что стохастическая чувствительность равновесия не зависит от параметрического шума. Для цикла добавление мультипликативного шума меняет его стохастическую чувствительность пропорционально величине σ_1 (рис. 6).

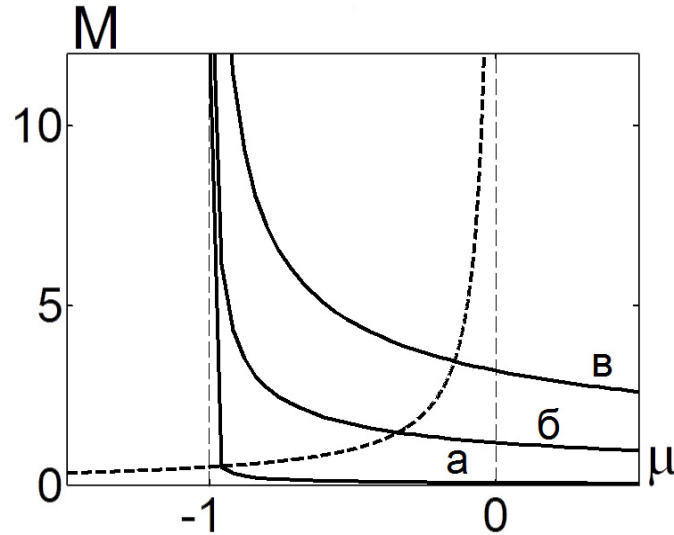


Рис. 6: Коэффициент стохастической чувствительности аттракторов системы Хопфа (жесткий режим) для равновесия (пунктир) и цикла (сплошная) при а) $\sigma_1 = 0$, б) $\sigma_1 = 3$, в) $\sigma_1 = 5$.

В разделе 2.3.3 проведена оценка погрешности аппроксимации плотности распределения, найденной с помощью функции стохастической чувствительности. На рис. 7 представлены графики аналитически найденной функции плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$ (сплошная) системы Хопфа (мягкий режим) и ее ФСЧ-аппроксимация $\bar{\rho}(x, \varepsilon)$ (пунктир) при $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ для $\varepsilon_1 = 0.3$ (рис. 7 а) и $\varepsilon_2 = 1$ (рис. 7 б). Увеличение шума ведет к увеличению погрешности.

В работе также получены результаты оценки погрешностей для трех норм

$$R_1(\varepsilon) = \max_x |\rho(x, \varepsilon) - \bar{\rho}(x, \varepsilon)|,$$

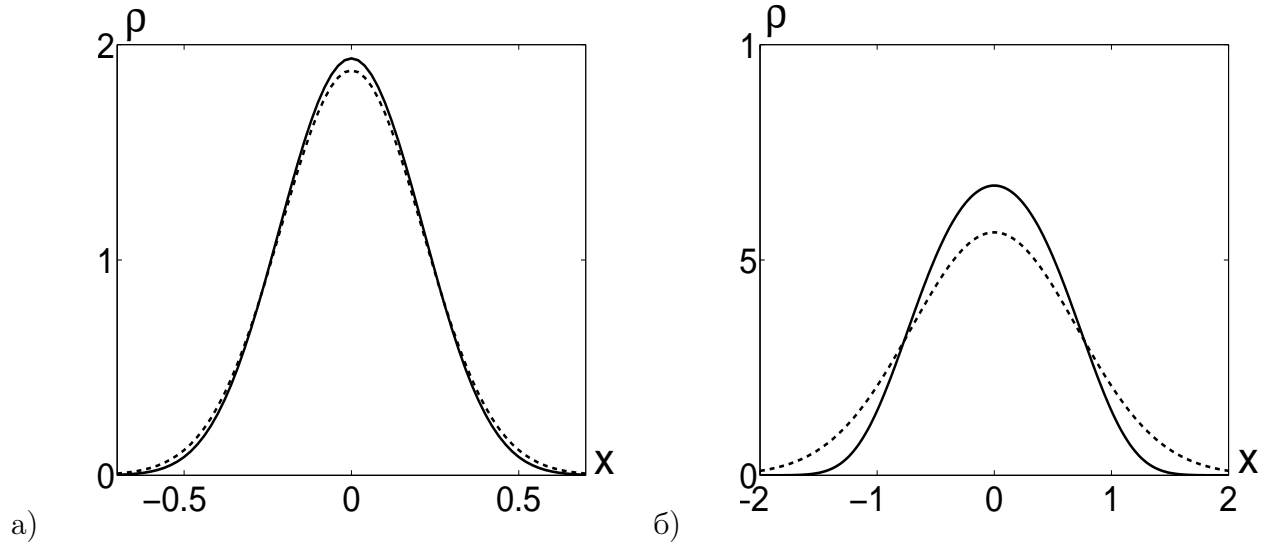


Рис. 7: Точная функция плотности распределения $\rho(x, \varepsilon)$ (сплошная) и ее ФСЧ-аппроксимация $\bar{\rho}(x, \varepsilon)$ (пунктир) при $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 1$ для а) $\varepsilon = 0.3$, б) $\varepsilon = 1$.

$$R_2(\varepsilon) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (\rho(x, \varepsilon) - \bar{\rho}(x, \varepsilon))^2 dx},$$

$$R_3(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} |\rho(x, \varepsilon) - \bar{\rho}(x, \varepsilon)| dx.$$

Результаты для систем Хопфа в обоих случаях представлены в таблицах. В зоне малых шумов ($\varepsilon < 0.5$) ошибка аппроксимации не превышает 5%.

Раздел 2.3.4 посвящен исследованию стохастической чувствительности аттракторов системы Ван-дер-Поля

$$\begin{cases} dx = y dt, \\ dy = (-x + \delta y(1 - x^2)) dt + \varepsilon \sigma_1 y(1 - x^2) dw_1 + \varepsilon \sigma_2 dw_2. \end{cases} \quad (24)$$

На рис. 8 представлены графики случайных траекторий стохастического осциллятора Ван-дер-Поля. Как видим, разброс случайных траекторий вокруг цикла с ростом δ уменьшается. При этом ширина пучка вдоль цикла заметно меняется. Это означает, что стохастическая чувствительность отдельных участков цикла может существенно отличаться. Функция стохастической чувствительности позволяет получить детальное описание этих явлений.

Увеличение мультипликативного шума приводит к перераспределению случайных состояний системы от предельного цикла к окрестности детерминированного равновесия. Подобное поведение наблюдается в системе Хопфа. На

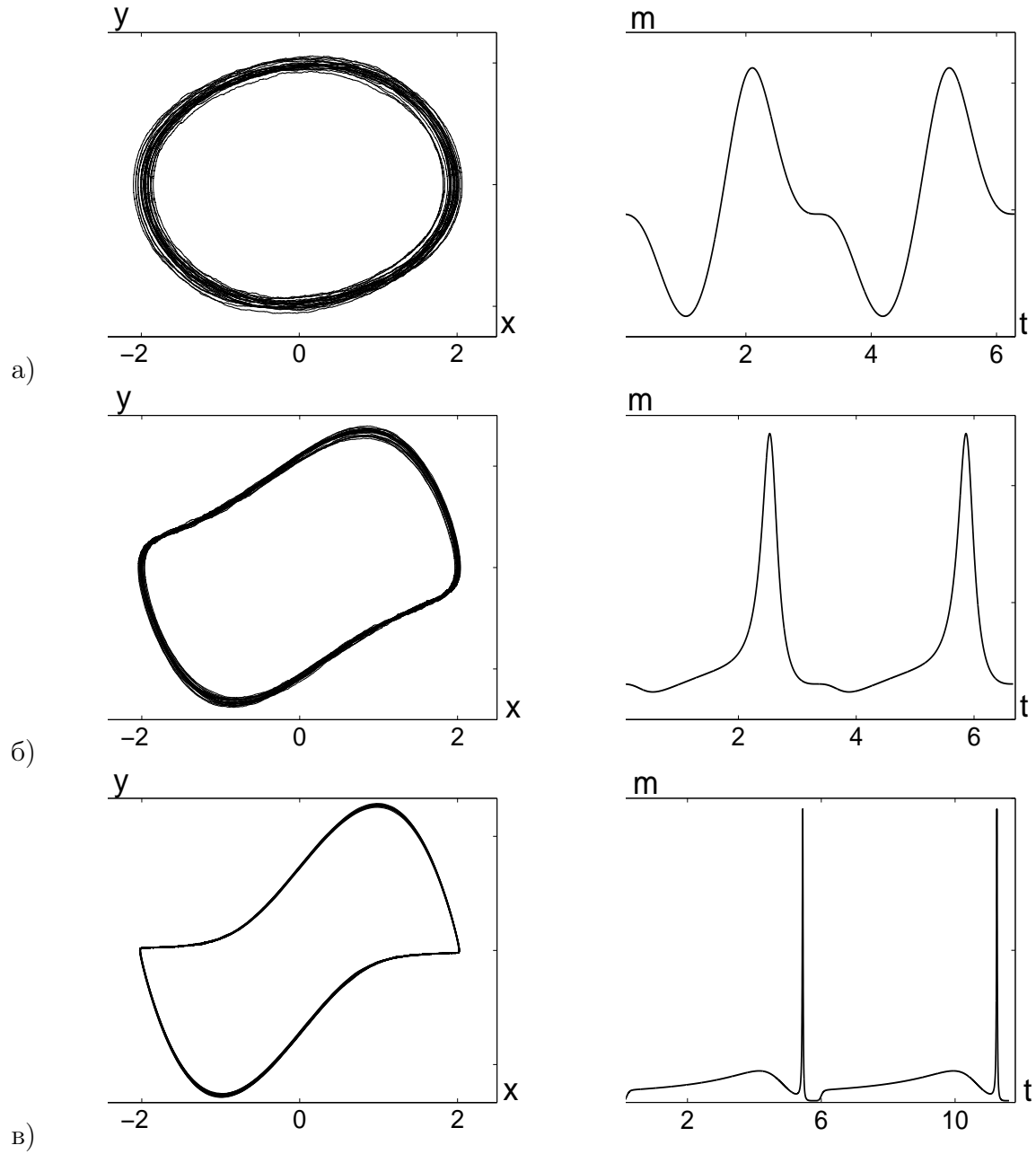


Рис. 8: Случайные траектории и функции стохастической чувствительности модели Ван-дер-Поля при $\varepsilon = 0.1$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$ для а) $\delta = 0.1$, б) $\delta = 1$, в) $\delta = 5$.

рис. 9 представлены состояния стохастической системы Ван-дер-Поля при различных значениях интенсивности σ_1 .

В **разделе 2.3.5** представлены результаты исследования чувствительности аттракторов системы брюсселятора.

В **Третьей главе** описан программный комплекс "Моделирование и анализ аттракторов нелинейных стохастических систем". Глава состоит из четырех пунктов и содержит основные сведения о программном комплексе, его структуре, назначении и описании реализованных алгоритмов по моде-

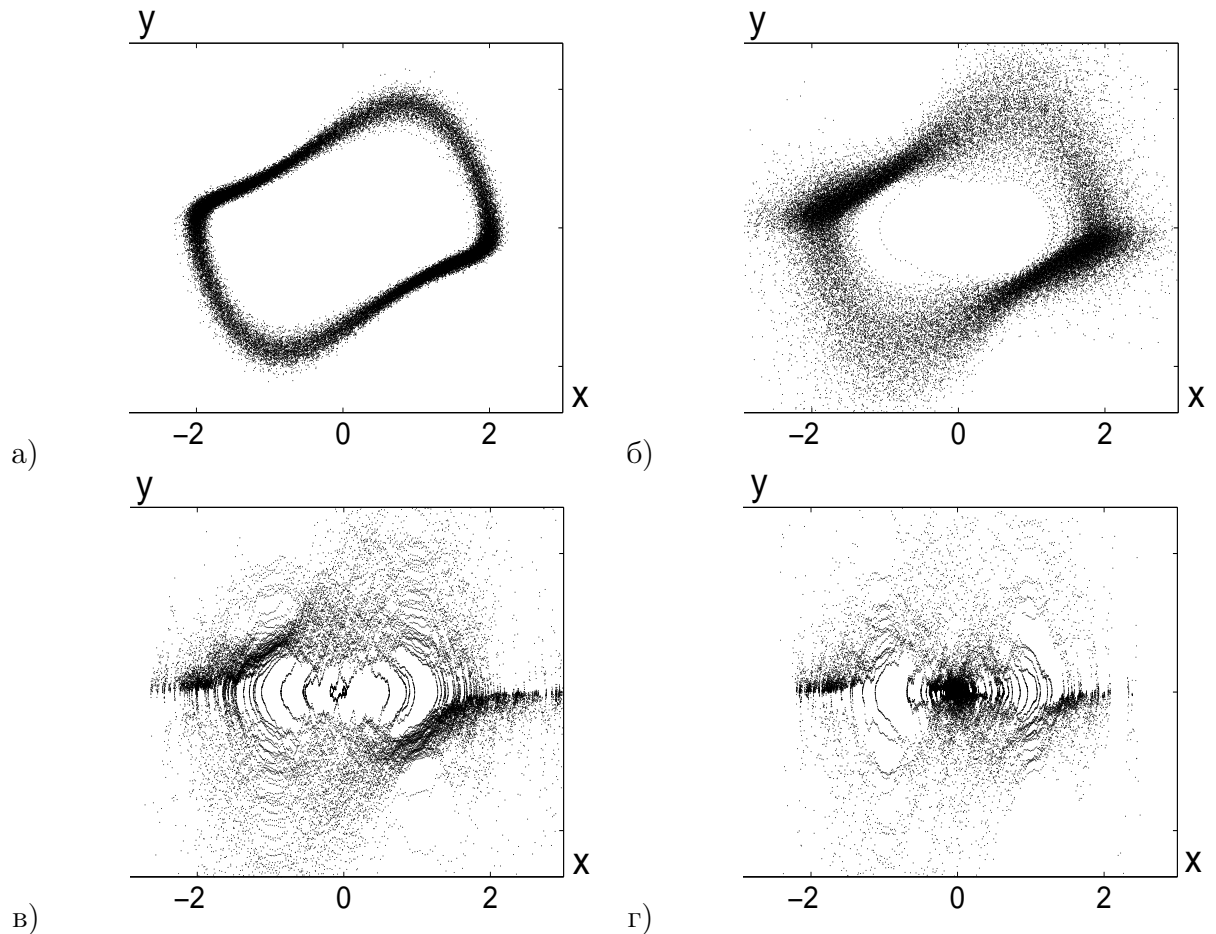


Рис. 9: Случайные состояния системы Ван-дер-Поля при $\delta = 1$, $\varepsilon = 1$, $\sigma_2 = 1$ для а) $\sigma_1 = 0.1$, б) $\sigma_1 = 0.4$, в) $\sigma_1 = 1$, г) $\sigma_1 = 2$.

лированию и анализу аттракторов. Также приведен перечень моделей, для которых реализованы алгоритмы моделирования и анализа аттракторов и стохастических бифуркаций. В главе представлены численные схемы построения решений детерминированных и стохастических систем. Описаны формы преобразования для реализации двух нормально распределенных случайных величин. Глава содержит подробное описание решаемых в комплексе задач, отдельно для одномерных и двумерных систем, а также описание интерфейса пользователя по применению разработанного программного комплекса.

Приложение содержит руководство пользователя.

В **Заключении** приведен перечень основных результатов диссертации, выносимых на защиту.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, определенных ВАК:

1. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В. *Анализ стохастических аттракторов при бифуркации точка покоя - цикл* // Автоматика и Телемеханика.

2007. N 10, С. 53-69.

2. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б. *Анализ индуцированных шумом бифуркаций для системы Хопфа* // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. Саратов. 2010. Т. 17. N. 5. С. 3-16.

Другие публикации:

3. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В. *Метод функции стохастической чувствительности в анализе случайных возмущений предельных циклов* // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем. Екатеринбург: УрГУПС. 2006. N 54(137), С. 20.
4. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В. *Бифуркация "Точка покоя-цикл" для систем со случайными возмущениями* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 38-ой региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2007. С. 116.
5. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В. *Компьютерное моделирование 2D-аттракторов стохастических систем* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 41-ой региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2010. С. 216.
6. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б. *Анализ стохастических бифуркаций в присутствии параметрических шумов* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 39-ой региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2008. С. 97.
7. Башкирцева И.А., Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б. *Индукцированные шумами переходы и бифуркации: модельные примеры* // Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды 40-ой региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2009. С. 112.
8. Перевалова Т.В. *Компьютерное моделирование стохастической динамики нелинейных колебаний* // Компьютерное моделирование 2006. Санкт-Петербург. 2006. С. 86-87.
9. Перевалова Т.В. *Стохастические бифуркации в модели Хопфа* // Компьютерное моделирование 2007. Санкт-Петербург. 2007. С. 57.
10. Перевалова Т.В. *Анализ стохастических аттракторов и бифуркаций при переходе "точка покоя - цикл"* // Информационные и коммуникационные технологии в образовании. 2007. Борисоглебск. 2007. С. 140.

11. Перевалова Т.В. *Программный комплекс "Исследование стохастической устойчивости динамических систем"* // Компьютерное моделирование 2008. Санкт-Петербург. 2008. С. 147.
12. Перевалова Т.В. *Программный комплекс "Моделирование и анализ динамики нелинейных динамических систем"* // Материалы межвузовской конференции по проблемам информатики СПИСОК-2009. Екатеринбург. 2009. С. 127-129.
13. Перевалова Т.В., Ряшко Л.Б., Федотов С.П. *Индукцированный шумом транспорт аттракторов стохастических систем* // Материалы конференции, посвященной 50-летию кафедры вычислительной математики и математико-механического факультета УрГУ. Екатеринбург. 2010. С. 62-66.

Подписано в печать . Формат 60x80 1/16.

Бумага ВХИ. Печать ризограф.

Гарнитура "Arial".

Заказ N . Тираж 100 экз.

Отпечатано в ИПЦ "Издательство УрГУ".

620083, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.